



第29届全国中小学生数学公开赛

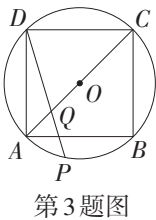
(中考人教)

姓名: _____ 邮编: _____ 地址: _____ 省(市) _____ 县 _____ 学校 _____ 班级 _____
指导教师: _____ 联系电话: _____ 校长: _____ 联系电话: _____

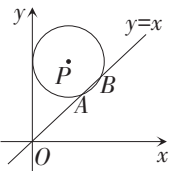
(满分:100分)

一、选择题(每小题4分,共32分)

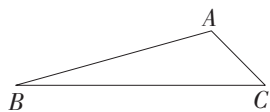
- 已知 $abc \neq 0$, 且 $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = p$, 那么直线 $y = -px + p$ 一定经过 ()
A. 第一、四象限 B. 第二、三象限
C. 第一、二、三象限 D. 第二、三、四象限
- 已知 $m = 1 + \sqrt{2}$, $n = 1 - \sqrt{2}$, 若 $(5m^2 - 10m + a) \cdot (2n^2 - 4n - 5) = -12$, 则 a 的值为 ()
A. 1 B. -1 C. -9 D. 9
- 如图, 正方形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, 点 P 在劣弧 \widehat{AB} 上, 连接 DP , 交 AC 于点 Q . 若 $QP = QO$, 则 $\frac{QO}{QA}$ 的值为 ()
A. $2\sqrt{3} - 1$ B. $2\sqrt{3}$
C. $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ D. $\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$
- 如图, 在平面直角坐标系中, $\odot P$ 的圆心是 $(6, a)$ ($a > 6$), 半径为 6, 函数 $y = x$ 的图象被 $\odot P$ 截得的弦 AB 的长为 $4\sqrt{3}$, 则 a 的值为 ()
A. $4\sqrt{3}$ B. $2 + \sqrt{6}$ C. $6 + 4\sqrt{3}$ D. $6 + 2\sqrt{3}$
- 一般地, 当 α, β 为任意角时, $\sin(\alpha + \beta)$ 与 $\sin(\alpha - \beta)$ 的值可以用下面的公式求得: $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$; $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.



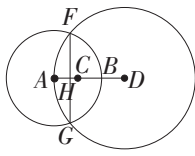
第3题图



第4题图



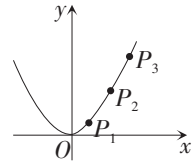
第5题图



第7题图

- $\cos\alpha\sin\beta$.
例如: $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.
- 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 15^\circ$, $\angle C = 45^\circ$, $AC = \sqrt{6} - \sqrt{2}$, 则 BC 的长为 ()
A. $\sqrt{6} - \sqrt{2}$
B. $2\sqrt{6}$
C. $2\sqrt{3}$
D. 2
- 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象 G 和 x 轴有且只有一个交点 A , 与 y 轴的交点为 $B(0, 4)$, 且 $ac = b$. 将一次函数 $y = -3x$ 的图象作适当平移, 使它经过点 A , 记所得的图象为 L , 图象 L 与 G 的另一个交点为 C , 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()
A. 12 B. 13 C. 14 D. 15
- 已知线段 AB 的中点为 C , 以点 A 为圆心, AB 的长为半径作圆, 在线段 AB 的延长线上取点 D , 使得 $BD = AC$. 再以点 D 为圆心, DA 长为半径作圆, 与 $\odot A$ 分别相交于点 F, G , 连接 FG 交 AB 于点 H , 则 $\frac{AH}{BC}$ 的值为 ()
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

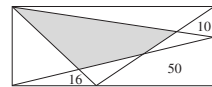
- 如图, 小明设计了一个电子游戏: 一电子跳蚤从横坐标为 t ($t > 0$) 的 P_1 点开始, 按点的横坐标依次增加 2 的规律, 在抛物线 $y = ax^2$ ($a > 0$) 上向右跳动, 得到点 P_2, P_3 , 这时 $\triangle P_1P_2P_3$ 的面积为 ()
A. a
B. $2a$
C. $4a$
D. $8a$



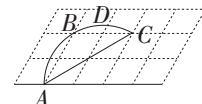
第8题图

二、填空题(每小题4分,共24分)

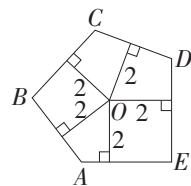
- 直线 $y = kx$ ($a > 0$) 与反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 相交于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点, 则 $x_1y_1 + x_2y_2$ 的值为 _____.
- 如图, 在矩形内画了一些线段, 已知边上有 3 块多边形面积分别是 16, 50, 10, 那么图中阴影部分的面积为 _____.
- 如图, 15 个形状大小完全相同的菱形组成网格, 菱形的顶点称为格点. 已知菱形的一个角为 60° , A, B, C 都在格点上. 点 D 在过 A, B, C 三点的圆弧上, 若 E 也在格点上, 且 $\angle AED = \angle ACD$, 则 $\cos \angle AEC$ 的值为 _____.
- 如图, 五边形 $ABCDE$ 内有一点 O , 点 O 到五条边的垂线段的长都是 2 cm. 若五边形的周长是 15 cm, 则五边形 $ABCDE$ 的面积是 _____ cm^2 .



第10题图



第11题图



第12题图

- 已知直线 $l_n: y = -\frac{n+1}{n}x + \frac{1}{n}$ (n 是正整数), 当 $n = 1$ 时, 直线 $l_1: y = -2x + 1$ 与 x 轴和 y 轴分别交于点 A_1, B_1 , 设 $\triangle A_1OB_1$ (O 是平面直角坐标系的原点) 的面积为 S_1 ; 当 $n = 2$ 时, 直线 $l_2: y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ 与 x 轴和 y 轴分别交于点 A_2, B_2 , 设 $\triangle A_2OB_2$ 的面积为 S_2 ; ...; 若直线 l_n 与 x 轴和 y 轴分别交于点 A_n 和 B_n , 设 $\triangle A_nOB_n$ 的面积为 S_n , 则 $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{2024}$ 的值为 _____.
(下转第3版)

参赛规则和评奖办法

由学习报社主办的中小学生数学公开赛是全国性的大型赛事。赛题由全国各地特级教师及中考命题专家组成的命题组精心命制, 测试范围为九年级数学所学内容。所有赛题紧扣《课程标准》, 依托教材, 注重对数学思维能力的考查, 对于同学们掌握数学解题的通用通法及期末、中考应试具有很强的指导性与导向性。

一、参赛规则

- 本次大赛不收取任何参赛及评审费用。
- 参赛者须按要求在试卷最上端写清基本情况。
- 卷面书写或所拍图片要工整、整洁、清楚, 否则试卷予以作废, 取消评奖资格。



4. 具体答题要求: 第一、二题只需写清题目序号及答案; 第三题需写出必要的解题步骤和运算过程。

5. 截止时间: 2024年3月10日。

二、参赛方式

1. 信件: (030009) 太原市三墙路坝陵北街盛世华庭 A1 座 21 层 学习报社 九年级人教责编 之白 收, 并将本次大赛的标志图案(见本版左下)沿虚线剪下贴在信封的左下角, 标志图案复印有效。

2. 邮件: rj9_xxb@126.com. (注: 邮件标题“公开赛”, 图片要清晰, 否则作废)

三、评奖办法

1. 本次大赛由有关数学教育专家、特级教师以及本报编辑组成评委会。

2. 本次大赛将评出一等奖、二等奖、三等奖及集体组织奖、优秀指导奖若干名。

3. 获奖名单将在 2024 年 6 月公布, 同时向获奖者颁发证书。(证书需扫码关注“初中乐学堂”公众号自行下载打印)

欢迎以班、校为单位集体组织参赛。欢迎对大赛提出宝贵意见。

咨询电话: 0351-3239641



学习报 中考数学人教

本期《模型引路 找出

解题思路》实战训练

参考答案

微专题一 $1. \frac{16}{3}$ 2.2.

微专题二 $1. \frac{8}{9}$ 2.80.

$3. y = \frac{4}{x}$.

4. 易得 $A(-1, 0), B(4, 0), C(0, 2)$. 已知 $\angle BPC$ 为直角, 则 P 在以 BC 为直径的圆上; $\triangle PBC$ 还是等腰直角三角形, 则 P 还在 BC 的中垂线上, 故可知点 P 在第一、四象限.

如图, 过点 P 作 x 轴的平行线交 y 轴于点 E , 过点 B 作 y 轴的平行线交 EP 的延长线于点 F .

则四边形 $OEFP$, 四边形 $OEPM$, 四边形 $MPFB$ 都是矩形, $\therefore PF = BM, EF = OB, OM = PE$.

$\therefore \triangle PBC$ 是以 $\angle BPC$ 为直角的等腰直角三角形,

$\therefore \angle BPC = 90^\circ, PB = PC$,

$\therefore PB = \frac{\sqrt{2}}{2}BC = \sqrt{10}$.

又 $\angle CPE = \angle PBF$.

易得 $\triangle PFB \cong \triangle CEP$ (AAS),

$\therefore PE = OM = 2t - 1 = BF, EC = PF = BM = 5 - 2t$.

$\therefore PF^2 + BF^2 = PB^2, \therefore (5 - 2t)^2 + (2t - 1)^2 = (\sqrt{10})^2$, 解得 $t_1 = 1, t_2 = 2$.

当 $t = 1$ 时, $OM = 2 - 1 = 1$,

$\therefore y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 = 3$,

\therefore 点 $D(1, 3)$;

当 $t = 2$ 时, $OM = 4 - 1 = 3$,

$\therefore y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 = 2$,

\therefore 点 $D(3, 2)$.

综上, 点 $D(1, 3)$ 或 $(3, 2)$.

微专题三

①同一象限内 k 的几何意义

1.B. 2.3. 提示: 过 D 作 $DE \perp AC$ 于 $E, BF \perp AC$ 于 F , 则易得 $DE = BF$. 连接 DE, OD , 可得 $S_{\triangle ADE} = S_{\triangle ABE} = S_{\triangle AOD}$.

②两个象限内 k 的几何意义

1.3.

③双反比例函数内 k 的几何意义

1.D. 2.18.

微专题四

1. (1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$.

(2) 易得直线 BC 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

如图, 过点 D 作 $DE \parallel y$ 轴交 BC 于点 E ,

第1题答案图

设 $D(t, -\frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 2)$, 则 $E(t, -\frac{1}{2}t + 2)$, ($0 < t < 4$)

$\therefore DE = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 2 - (-\frac{1}{2}t + 2) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t$,

$\therefore S_{\triangle CDB} = \frac{1}{2} \times 4 \times (-\frac{1}{2}t^2 + 2t) = -t^2 + 4t = -(t - 2)^2 + 4$.

$\therefore 0 < t < 4$,

\therefore 当 $t = 2$ 时, $\triangle CDB$ 的面积最大, 最大值为 4, 此时 $D(2, 3)$.

(上接第4版)

14. 已知抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 与直线 $l: y = x - m$ 相交于 A, B 两点, O 为此抛物线的顶点, P 为直线 l 上一动点, 已知点 A 的横坐标 $x_A = 2$, A 关于直线 OP 的对称点为 C , 则线段 BC 长度的最大值为_____.

三、解答题(共44分)

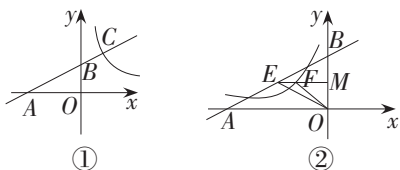
15. (7分) 若 $a+x^2=2\ 022, b+x^2=2\ 023, c+x^2=2\ 024$, 且 $abc=120$, 求 $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$ 的值.

16. (11分) 已知直线 $l: y = \frac{1}{2}x + m$, 过点 $A(-6, 0)$, 且与 y 轴交于点 B .

(1) 求 m 的值;

(2) 如图①, 反比例函数 $y = \frac{k_1}{x}$ 的图象与直线 l 交于第一象限点 C , 满足 $AC = 3BC$, 求反比例函数的解析式;

(3) 如图②, 设线段 AB 的中点为 E , 过点 E 作 y 轴的垂线, 垂足为 M , 交反比例函数 $y = \frac{k_2}{x}$ 的图象于点 F , 连接 OE, OF , 当 $\triangle OEF \sim \triangle OAE$ 时, 求 k_2 的值.



第16题图

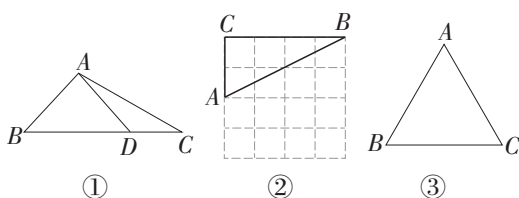
17. (13分) 定义: 三角形一边上的点将该边分为两条线段, 且这两条线段的积等于这个点与该边所对顶点连线长度的平方, 则称这个点为三角形该边的“奇点”. 如图①, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是 BC 边上一点, 连接 AD , 若 $AD^2 = BD \cdot CD$, 则称点 D 是 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的“奇点”.

【特例引入】为了研究, “爱心小组”从特殊

图形开始:

(1) ①等腰直角三角形的斜边上_____ (填“有”或“无”)“奇点”;

②如图②, 在 4×4 的网格中, $\triangle ABC$ 的顶点都在格点处, 请你用无刻度的直尺画出 AB 边上的“奇点”. (不写作法, 保留作图痕迹)



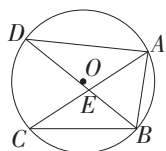
第17题图

③请你判断等边三角形一边上有没有“奇点”, 并借助图③通过计算说明你的判断.

【拓展延伸】善于动脑的“博学小组”想在圆中进行探究:

(2) 如图④, $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形, 点 E 是 AC 的中点, 连接 BE 延长交 $\odot O$ 于点 D , 连接 AD .

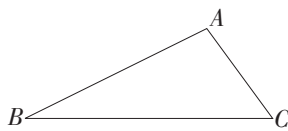
- ①证明: 点 E 是 $\triangle ABD$ 中 BD 边上的“奇点”;
- ②若 $\widehat{CD} = \widehat{BC}$, 证明 $AE^2 = 2AB \cdot AD$.



第17题图④

【应用实践】鉴于前两个小组的情况, “勤奋小组”展开了函数中的探究:

(3) ①如图⑤, 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = 10, \sin C = \frac{3}{5}, \tan B = \frac{1}{2}$, 若 D 是 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的“优点”, 求 BD 的长;



第17题图⑤

②若一次函数 $y = 2x + b$ 与反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 交于 A, B 两点, 与 y 轴交于点 C , 若 C 是 $\triangle ABO$ 中 AB 边上的“优点”, 求 b 的值.

18. (13分) 综合与实践 正方形纸片的折叠探究

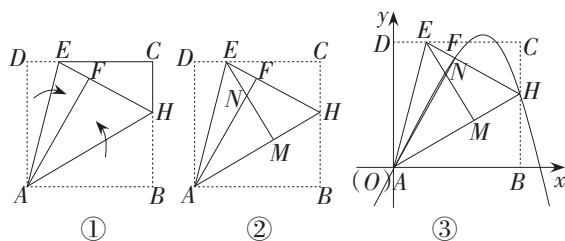
【背景】将一张边长为6的正方形纸片 $ABCD$ 沿 AE, AH 进行折叠, 使得 D, B 重合在点 F 处, 如图①.

【探究一】(1) ①图①中的 $\angle EAH =$ _____ $^\circ$;
②若 $BH = 2HC$, 则 DE 的长为_____.

【探究二】(2) 若沿着 EH 继续折叠正方形纸片, 点 C 恰好落在 AH 上的点 M 处, 连接 EM 交 AF 于点 N , 如图②, 请求出 EN 的长.

【探究三】(3) 把图②中的正方形放在平面直角坐标系中, 原点 O 在点 A 处, AB 在 x 轴正半轴上, AD 在 y 轴正半轴上, 如图③, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过点 O, F, H .

- ①求出抛物线的解析式;
- ②抛物线上是否存在一点 P , 使得以 A, H, P 为顶点的三角形是直角三角形(不与点 F 重合), 若存在, 请写出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



第18题图

□本报命题组

(获奖名单及答案详解见学习报网站: www.xuexibao.com)