答案详解(第13~16期)

主编 王静 终审 李双孝
责编 卢晓丽 照排 董俊英

椭圆的焦点在y轴上时，$a^2=\frac{1}{m}$，$b^2=1$，则$0<m<\frac{3}{4}$.

综上，实数m的取值范围是$(0,\frac{3}{4})\cup(\frac{4}{3},+\infty)$.

故选C.

6.直线$y=kx-k+1$恒过定点$(1,1)$.

又$\because \frac{1^2}{9}+\frac{1^2}{4}<1$，$\therefore$点$(1,1)$在椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$内部，

$\therefore$直线$y=kx-k+1$与椭圆相交.

故选B.

二、填空题

7.10；

8.$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

提示：

7.由题意，得$a=3$，$b=\sqrt{5}$，$c=2$，$\triangle PF_1F_2$的周长$=2a+2c=6+4=10$.故填：10.

8.由题意，可得$m=\sqrt{2\times8}=4$，则圆锥曲线方程为$x^2+\frac{y^2}{4}=1$，则$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{4-1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

三、解答题

9.解：依题意，有$|CA|+|CB|+|AB|=8$，$|AB|=2$，

$\therefore|CA|+|CB|=6$.

$\therefore$点C的轨迹是椭圆并除去x轴上的两顶点，且焦点为$A(-1,0)$，$B(1,0)$，$2a=6$，

$\therefore a=3$，$c=1$，

$\therefore b^2=a^2-c^2=9-1=8$.

$\therefore\triangle ABC$顶点C的轨迹方程是$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1(x\neq\pm3)$.

10.解：由$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，可得$b=\frac{1}{2}a$.

因此设椭圆方程为$\frac{x^2}{4b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，或$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{4b^2}=1$，

将点的坐标$(4,2\sqrt{3})$代入上式，可得$b^2=16$，或$b^2=19$.

故所求方程是$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1$，或$\frac{x^2}{19}+\frac{y^2}{76}=1$.

11.解：(1)将$(0,4)$代入C的方程得$\frac{16}{b^2}=1$，$\therefore b=4$.

由$e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$，得$\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{9}{25}$，即$1-\frac{16}{a^2}=\frac{9}{25}$，$\therefore a=5$，

$\therefore$椭圆C的方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

(2)过点$(3,0)$且斜率为$\frac{4}{5}$的直线方程为$y=\frac{4}{5}(x-3)$，

设直线与椭圆C的交点为$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，将直线方程$y=\frac{4}{5}(x-3)$代入C的方程，得$\frac{x^2}{25}+\frac{(x-3)^2}{25}=1$，即$x^2-3x-8=0$，则可由根与系数的关系得$x_1+x_2=3$，$\therefore$线段$AB$的中点坐标$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3}{2}$，$y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{2}{5}(x_1+x_2-6)=-\frac{6}{5}$，即中点坐标为$(\frac{3}{2},-\frac{6}{5})$.

12.解：(1)由已知得$c=2\sqrt{2}$，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，解得$a=2\sqrt{3}$.

又$b^2=a^2-c^2=4$，

所以椭圆G的方程为$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)设直线l的方程为$y=x+m$.

联立$\begin{cases}y=x+m,\\ \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$得$4x^2+6mx+3m^2-12=0$.①

设A，B的坐标分别为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，其中$x_1<x_2$.

令线段AB的中点为$E(x_0,y_0)$，

则$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{3m}{4}$，$y_0=x_0+m=\frac{m}{4}$.

因为线段AB是等腰$\triangle PAB$的底边，所以$PE\perp AB$.

所以PE的斜率$k=\frac{2-\frac{m}{4}}{-3+\frac{3m}{4}}=-1$，解得$m=2$.

此时方程①为$4x^2+12x=0$，解得$x_1=-3$，$x_2=0$.

由$y=x+m$，得$y_1=-1$，$y_2=2$.

所以$|AB|=3\sqrt{2}$.

此时，点$P(-3,2)$到直线AB：$x-y+2=0$的距离$d=\frac{|-3-2+2|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

所以$\triangle PAB$的面积$S=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{9}{2}$.

提升练

一、选择题

1~6.ABCDBC.

提示：

1.直线$x+2y=2$与坐标轴的交点为$(2,0)$，$(0,1)$，即为椭圆的两个顶点.

又焦点在x轴上，$\therefore a=2$，$b=1$，

$\therefore c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$，

$\therefore$焦点坐标为$(\pm\sqrt{3},0)$.

故选A.

2.已知两个焦点的坐标分别是$F_1(-8,0)$，$F_2(8,0)$，可知椭圆的焦点在x轴上，且$c=8$.由椭圆的定义，可得$2a=20$，即$a=10$.

由a，b，c的关系解得$b=\sqrt{a^2-c^2}=6$，

$\therefore$椭圆方程是$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$.

故选B.

3.依题意可知小球经两次椭圆壁后反弹后回到A点，根据椭圆的性质可知所走的路程正好是$4a=4\times4=16$.

故选C.

4.椭圆方程可化为$9x^2+36y^2=324$.

设弦的两端点为$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由题得$\frac{x_1+x_2}{2}=4$，$\frac{y_1+y_2}{2}=2$.

由$\begin{cases}9x_1^2+36y_1^2=324,\\ 9x_2^2+36y_2^2=324\end{cases}$作差，得$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{9(x_1+x_2)}{36(y_1+y_2)}$.

将$\frac{x_1+x_2}{2}=4$，$\frac{y_1+y_2}{2}=2$代入上式，得$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{1}{2}$，

即$k_{AB}=-\frac{1}{2}$，

所以弦所在的直线方程为$y-2=-\frac{1}{2}(x-4)$，

即$x+2y-8=0$.

故选D.

5.$\because$直线$mx+ny=4$和圆O：$x^2+y^2=4$没有交点，

$\therefore\frac{4}{\sqrt{m^2+n^2}}>2$，$\therefore m^2+n^2<4$，

$\therefore\frac{m^2}{9}+\frac{n^2}{4}<\frac{m^2}{9}+\frac{4-m^2}{4}=1-\frac{5}{36}m^2<1$，

$\therefore$点(m,n)在椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$的内部，

$\therefore$过点(m,n)的直线与椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$的交点个数为2个.

故选B.

6.$\frac{y}{x-2}$表示椭圆上的点(x,y)与定点$(2,0)$连线的斜率.

不妨设$\frac{y}{x-2}=k$，则过定点$(2,0)$的直线方程为$y=k(x-2)$.

由$\begin{cases}y=k(x-2),\\ 4x^2+y^2=4,\end{cases}$得$(k^2+4)x^2-4k^2x+4k^2-4=0$.

令$\Delta=(-4k^2)^2-4(k^2+4)(4k^2-4)=0$，得$k=\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$，

$\therefore k_{\min}=-\frac{2}{3}\sqrt{3}$，即$\frac{y}{x-2}$的最小值为$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

故选C.

二、填空题

7.$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$；

8.$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

提示：

7.由题意，可设椭圆C_1：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{2}=1$，$C_2$：$\frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>\sqrt{2}$，$0<b<\sqrt{2})$.

由$\frac{a^2-2}{a^2}=\frac{2-b^2}{2}$，即有$ab=2$①.由$2\sqrt{a^2-2}\cdot\sqrt{2-b^2}=2\sqrt{2}$，可得$(a^2-2)(2-b^2)=2$，即$a^2+b^2=5$.②

联立①②，解得$a=2$，$b=1$，即椭圆C_1：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

故答案为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

8.设$F(-c,0)$，$c^2=a^2-b^2$，$A(-a,0)$，$P(x_1,y_1)$，使得$\frac{|AP|}{|FP|}$是常数，

设$\frac{|AP|}{|FP|}=\sqrt{\lambda}$，则有$(x_1+a)^2+y_1^2=\lambda[(c+x_1)^2+y_1^2]$($\lambda$是常数).

$\because x_1^2+y_1^2=b^2$，

$\therefore b^2+2ax_1+a^2=\lambda(b^2+2cx_1+c^2)$.

比较两边，得$b^2+a^2=\lambda(b^2+c^2)$，$a=\lambda c$，

故$cb^2+ca^2=a(b^2+c^2)$，即$ca^2-c^3+ca^2=a^3$，即$e^3-2e+1=0$，

$\therefore(e-1)(e^2+e-1)=0$，$\therefore e=1$或$e=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

$\because 0<e<1$，$\therefore e=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

三、解答题

9.解：由椭圆的方程$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$知$a=4$，$b=3$，$\therefore c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{7}$.由$F_1(-\sqrt{7},0)$，所以直线$l$的方程为$x-y+\sqrt{7}=0$.

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，把直线$x-y+\sqrt{7}=0$代入椭圆方程$9x^2+16y^2=144$，得$25y^2-18\sqrt{7}y-81=0$，此方程有两根y_1，y_2，则$y_1+y_2=\frac{18\sqrt{7}}{25}$，$y_1y_2=-\frac{81}{25}$.

$\therefore|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{72\sqrt{2}}{25}$.

所以$S_{\triangle ABF_2}=\frac{1}{2}|F_2F_1||y_1-y_2|=\frac{1}{2}\times2\sqrt{7}\times\frac{72\sqrt{2}}{25}=\frac{72\sqrt{14}}{25}$.

10.解：由椭圆的离心率为$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，有$a=\sqrt{2}c$，则$b=\sqrt{a^2-c^2}=c$.

所以可设椭圆的方程为$\frac{x^2}{2c^2}+\frac{y^2}{c^2}=1$，即$x^2+2y^2=2c^2$.

直线l经过焦点F，其倾斜角为$\frac{\pi}{4}$，可设为$y=x-c$.

由$\begin{cases}y=x-c,\\ x^2+2y^2=2c^2,\end{cases}$可得$\begin{cases}x=0,\\ y=-c,\end{cases}$或$\begin{cases}x=\frac{4}{3}c,\\ y=\frac{1}{3}c,\end{cases}$

即$A(0,-c)$，$B(\frac{4}{3}c,\frac{1}{3}c)$.

由$|AB|=\sqrt{(\frac{4}{3}c^2)+(\frac{1}{3}c+c)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$，解得$c=1$，

故所求椭圆的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

学习报®
高中数学
全国教辅类一级报纸
北师大(文科)
选修1-1
2019-2020
第13~16期
教师用报指南
2019年10月2日
http://www.xuexibao.com
山西出版传媒集团主管 山西三晋报刊传媒集团主办 学习报社编辑出版 总编辑 苗俊青 国内统一刊号 CN14-0708/(F)

第13期

2版 《堂堂清》

§1 命题

1.B； 2.D.

3.在平面直角坐标系中，两直线平行；两条直线的斜率相等.

4.A.

5.③；①②④⑤.

6.解：(1)若$m<\frac{1}{4}$，则一元二次方程$mx^2-x+1=0$有实根，真命题.因为一元二次方程$mx^2-x+1=0$有无实根取决于判别式$\Delta=1-4m$，当$m<\frac{1}{4}$时，$\Delta>0$，故当$m<\frac{1}{4}$时，一元二次方程$mx^2-x+1=0$有实根为真命题.

(2)若$x\in\mathbf{R}$，则$x^2\geqslant0$；真命题.

(3)若两条直线互相垂直，则这两条直线的斜率乘积等于-1；假命题.当一条直线斜率为0，另一条直线斜率不存在时两条直线垂直，而斜率乘积不等于-1.

§1 四种命题与四种命题间的相互关系

1.C. 2.C. 3.D. 4.D. 5.A. 6.C.

7.解：逆命题：若方程$x^2+2x+q=0$有实根，则$q\leqslant1$，为真命题.

否命题：若$q>1$，则方程$x^2+2x+q=0$无实根，真命题.

逆否命题：若方程$x^2+2x+q=0$无实根，则$q>1$，真命题.

§2 充分条件与必要条件

1.A. 2.B. 3.A. 4.A. 5.B. 6.A.

7.充分不必要. 8.$a\geqslant1$.

3版 同步分层能力测试题(一)

基础练

一、选择题

1~6.CBDCCC.

提示：

1.①④是命题，②③不是命题.地球上的四大洋是不完整的句子.

故选C.

2.命题"如果一个四边形是正方形，那么这个四边形一定是矩形"，逆命题是：如果四边形为矩形，则这个四边形为正方形.这个命题是假命题，因为逆命题和否命题互为逆否命题，故否命题也是假命题.原命题是真命题，故逆否命题还是真命题，故假命题一共有两个.

故选B.

3.命题：若$a>0$，则$x^2+x-2a=0$有实根的否命题为：若$a\leqslant0$，则$x^2+x-2a=0$没有实根.

故选D.

4.①逆命题：若x，y互为倒数，则$xy=1$，是真命题.

②否命题：不相似的三角形周长不相等，是假命题.

③方程$x^2-2bx+b^2+b=0$无实根，则$b>0$，是真命题.

④若$A\not\supseteq B$，则$A\cup B\neq B$，是假命题.

故选C.

5.当$a>0$且$b>0$时，一定有$a+b>0$且$ab>0$.

反之，当$a+b>0$且$ab>0$时，一定有$a>0$，$b>0$.

故"$a>0$且$b>0$"是"$a+b>0$且$ab>0$"的充要条件.

故选C.

6.由题意得函数$f(x)=2^x-\frac{1}{x}+a$在$(1,2)$上单调递增，又函数$f(x)$在$(1,2)$上有零点，所以$f(1)f(2)=(1+a)\cdot(\frac{7}{2}+a)<0$，解得$-\frac{7}{2}<a<-1$.

$\because(-\frac{7}{2},1)\supsetneqq(-\frac{7}{2},-1)$，

$\therefore p$是q的必要不充分条件.

故选C.

二、填空题

7.必要不充分；

8.②④.

提示：

7."若A，则B"的否命题为真，则其逆命题为真，故"若B，则A"成立，而"若A，则B"不成立，故A是B的必要不充分条件.

8.②中由过相对侧棱截面的交线垂直于底面并与侧棱平行，可知命题成立，④中由题意，可知对角面均为长方形，即可证命题成立.①③错误，反例如有一对侧面与底面垂直的斜四棱柱.

三、解答题

9.解：真命题有：(1)(2)(3).

(1)显然正确.

(2)$x\in\mathbf{Z}$，或$x\in\mathbf{Q}$，即$x\in\mathbf{Q}$，$\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}$.故正确.

(3)$\because\alpha$，β为锐角，$\alpha+\beta=90°$，

$\therefore\sin\alpha=\sin(90°-\beta)=\cos\beta$.

$\because\sin\alpha=\cos\beta=\sin(90°-\beta)$，

又$0°<\beta<90°$，$\therefore0°<90°-\beta<90°$.

$\because0°<\alpha<90°$，$\therefore\alpha=90°-\beta$，$\therefore\alpha+\beta=90°$.

(4)a，b，c成等比数列$\Rightarrow b^2=ac\Rightarrow b=\pm\sqrt{ac}$；当$b=0$，$a=0$，$c=1$时满足$b=\sqrt{ac}$，但$a$，$b$，$c$不成等比数列.

(5)函数$f(x)=|x-a|$在$[a,+\infty)$上为增函数，

当$a\leqslant1$时，$f(x)$在$[1,+\infty)$上为增函数，

当$a>1$时，$f(x)$在$[1,+\infty)$上不是增函数，

故$a=1$是$f(x)=|x-a|$在$[1,+\infty)$上为增函数的充分不必要条件.

10.解：(1)因为四边形的对角线互相平分$\not\Rightarrow$四边形是矩形；四边形是矩形$\Rightarrow$四边形的对角线互相平分，

所以p是q的必要不充分条件.

(2)因为$x=1$或$x=2\Rightarrow x-1=\sqrt{x-1}$；$x-1=\sqrt{x-1}\Rightarrow x^2-2x+1=x-1\Rightarrow x^2-3x+2=0\Rightarrow x=1$或$x=2$，

所以p是q的充要条件.

(3)因为在$\triangle ABC$中，$A\neq60°\not\Rightarrow\sin A\neq\frac{\sqrt{3}}{2}$.

如当$A=120°$时，$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

在$\triangle ABC$中，$\sin A\neq\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow A\neq60°$，

所以p是q的必要不充分条件.

11.解：(1)"若p，则q"的形式：若两个三角形全等，则这两个三角形的对应边相等；是真命题.

逆命题：若两个三角形的对应边相等，则这两个三角形全等；是真命题.

否命题：若两个三角形不全等，则这两个三角形的对应边不全相等；是真命题.

逆否命题：若两个三角形的对应边不全相等，则这两个三角形不全等；是真命题.

(2)"若p，则q"的形式：若一个四边形的四条边相等，则它是正方形；是假命题.

逆命题：若一个四边形是正方形，则它的四条边相等；是真命题.

否命题：若一个四边形的四条边不全相等，则它不是正方形；是真命题.

逆否命题：若一个四边形不是正方形，则它的四条边不全相等；是假命题.

12.解：由题意，知$Q=\{x|1<x<3\}$，$\because Q\subseteq P$，$\therefore\begin{cases}a-4\leqslant1,\\ a+4\geqslant3,\end{cases}$解得$-1\leqslant a\leqslant5$，

$\therefore$实数a的取值范围是$[-1,5]$.

提升练

一、选择题

1~6.DBDCAA.

提示：

1.$2x^2-5x-3<0\Rightarrow-\frac{1}{2}<x<3$，

$\because(-\frac{1}{2},3)\subsetneqq(-\frac{1}{2},4)$，

$\therefore-\frac{1}{2}<x<4$是$2x^2-5x-3<0$的必要不充分条件.

故选D.

2.①若$x+y=0$，则x，y互为相反数，为真命题，则其逆否命题也为真命题，故①正确；

②"若$a>b$，则$a^2>b^2$"的逆命题为"若$a^2>b^2$，则$a>b$".若$a=-2$，$b=0$满足$a^2>b^2$，但推不出$a>b$，故②为假命题；

③"若$x\leqslant-3$，则$x^2-x-6>0$"的否命题为"若$x>-3$，则$x^2-x-6\leqslant0$"，当$x=4$时，$x^2-x-6\leqslant0$不成立，故③为假命题；

④若a^b是无理数，则a，b是无理数"的逆命题为：若a，b是无理数，则a^b是无理数.该命题是假命题.

取$a=(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$，$b=\sqrt{2}$，

则$a^b=[(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}]^{\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^2=2$，为有理数.所以该命题是假命题.

故真命题的个数为1个.

故选B.

3.已知a，b是实数，则由$a<0$且$b<0$不一定推出有$ab(a-b)>0$.比如当$a<b<0$时，左推不出右；反之若$ab(a-b)>0$，则$a-b$和ab同号即可，当$a>b>0$时就满足了$ab(a-b)>0$，当$b<a<0$时也满足，故不能确定a和b的正负，故从右边也推不出左边，即左边是右边的是既不充分也不必要条件.

故选D.

4.特例：p：在$\triangle ABC$中，若$A=B$，则$a=b$；

r：若在$\triangle ABC$中，$A\neq B$，则$a\neq b$；

s：在$\triangle ABC$中，若$a\neq b$，则$A\neq B$；

t：在$\triangle ABC$中，若$a=b$，则$A=B$.

故选C.

5.直线l_1：$ax+y+2=0$，l_2：$3x+(a-2)y+2a=0$，若$l_1/\!/l_2$，则$a(a-2)=3$且$a^2\neq3$，得$a=3$或-1，故"$a=3$"是"$l_1/\!/l_2$"的充分不必要条件.故选A.

6.设命题a："若p，则q".可知命题a是祖暅原理的逆否命题，由命题的性质可知必然成立.故p是q的充分条件.设命题b："若q，则p"，对此可以举出反例，若A比B在某些等高处的截面积小一些，在另一些等高处的截面积多一些，且多的总量与少的总量相抵，则它们的体积还是一样的.所以命题b："若q，则p"是假命题，即p不是q的必要条件.

综上所述，p是q的充分不必要条件.

故选A.

二、填空题

7.真；

8.必要不充分.

提示：

7.互为逆否的命题同真同假.

8.$m\neq3\nRightarrow|m|\neq3$；$|m|\neq3\Rightarrow m\neq3$且$m\neq-3$.

三、解答题

9.解：由题意知$\begin{cases}(2m+3)^2-4m(1-m)>0,\\ \dfrac{1-m}{m}<0.\end{cases}$

$\therefore m>1$或$m<0$，即所求充要条件是$m>1$，或$m<0$.

10.解：由题可得集合A，B均不为空集.对集合B，由$x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant0$，得$(x-2)\cdot[x-(3a+1)]\leqslant0$，

$\therefore$①当$a\geqslant\dfrac{1}{3}$时，$B=\{x|2\leqslant x\leqslant3a+1\}$；

②当$a<\dfrac{1}{3}$时，$B=\{x|3a+1\leqslant x\leqslant2\}$.

$\because p$是q的充分条件，$\therefore A\subseteq B$，

从而有$\begin{cases}a\geqslant\dfrac{1}{3},\\ a^2+1\leqslant3a+1,\\ 2a\geqslant2,\end{cases}$或$\begin{cases}a<\dfrac{1}{3},\\ a^2+1\leqslant2,\\ 2a\geqslant3a+1,\end{cases}$

解得$1\leqslant a\leqslant3$，或$a=-1$.

综上，所求实数a的取值范围是$\{a|1\leqslant a\leqslant3$，或$a=-1\}$.

第14期

2版 《堂堂清》

§3.1~3.2 全称量词与存在量词

1.B； 2.A. 3.A. 4.$(-\infty,3]$.

5.解：(1)可以改写为“所有的凸多边形的外角和都等于360°”，故为全称命题.

(2)含有存在量词“有的”，故是特称命题.

(3)含有全称量词“任意”，故是全称命题.

(4)含有存在量词“有一个”，故为特称命题.

(5)若一个四边形是菱形，也就是所有的菱形，故为全称命题.

§3.3 全称命题与特称命题的否定

1.A. 2.B. 3.C. 4.D.

5.存在$x_0\in\mathbf{R}$，$\dfrac{1}{x_0-2}>0$，或$x_0-2=0$.

6.解：由题意，得$x=x^2-x-3$，解得$x=-1$，或$x=3$.

所以函数$f(x)=x^2-x-3$的不动点是-1，3.

§4.1~4.2 逻辑联结词“且”“或”

1.B. 2.A. 3.B.

4.解：(1)p且q：梯形有一组对边平行且有一组对边相等，

$\because q$：梯形有一组对边相等是假命题，

$\therefore p$且q是假命题.

p或q：梯形有一组对边平行或有一组对边相等，

$\because p$：梯形有一组对边平行是真命题，

$\therefore$命题p或q是真命题.

(2)p且q：-3与-1都是$x^2+4x+3=0$的解，真命题.

p或q：-3或-1是$x^2+4x+3=0$的解，真命题.

§4.3 逻辑联结词“非”

1.B.

2.$x\notin A$或$x\notin B$.

3.A.

4.解：(1)$\neg p$：100不能被4整除，或不能被5整除.

(2)方程$x^2-3=0$有有理数解.

3版 同步分层能力测试题(二)

基础练

一、选择题

1~6.ABDDAD.

提示：

1.含有存在量词的命题只有A，B，

而$\sin x_0\leqslant1$，所以$\sin x_0=\dfrac{\pi}{2}$不成立.

故选A.

2.若p或q是假命题，则p，q均为假命题.

故选B.

3.分清各命题中含有的量词是全称量词还是存在量词，其中选项A，B，C都是全称命题.故选D.

4.命题“任意$x\in\mathbf{R}$，$x^2\geqslant0$”的否定形式是存在$x_0\in\mathbf{R}$，使得$x_0^2<0$.

故选D.

5.$x>2\Rightarrow x^2>4$，$x^2>4\nRightarrow x>2$，故p为假命题；

由$\dfrac{a}{c^2}>\dfrac{b}{c^2}\Rightarrow a>b$，故$q$为真命题，

$\therefore p$或q为真，p且q为假.

故选A.

6.特称命题的否定是全称命题.故选D.

二、填空题

7.任意$n\in\mathbf{N}$，$2^n\leqslant1000$.

8.“p且q”“$\neg q$”；“p或q”“$\neg p$”.

提示：

7.命题：p：存在$n\in\mathbf{N}$，$2^n>1000$，则$\neg p$：任意$n\in\mathbf{N}$，$2^n\leqslant1000$.

8.p假q真.

三、解答题

9.解：(1)是“p或q”的形式.

其中p：5是30的约数；q：7是30的约数，

p真q假，故p或q为真，为真命题.

(2)是“$\neg p$”的形式，其中p：$8x-5<2$有自然数解.

$\because p$：$8x-5<2$有自然数解，如$x=0$，则为真命题.

故“$\neg p$”为假命题.

10.解：(1)特称命题，真命题.

(2)特称命题，真命题.

(3)特称命题，真命题.

(4)全称命题，假命题，如存在函数$y=x^2+x+1$的图像与x轴不相交.

11.解：(1)的否定：存在实数x_0，虽然满足$2x_0>4$，但$x_0\leqslant2$.

(2)的否定：存在一个实数$m\geqslant0$使$x^2+x-m=0$无实根.

(3)的否定：存在一个可以被5整除的整数，其末位不是0.

(4)的否定：存在一个数能被8整除，但不能被4整除.

(5)的否定：存在一个四边形，虽然它是正方形，但它的四条边中至少有两条不相等.

12.解：(1)“两次都击中飞机”是“p且q”；

(2)“恰有一次击中飞机”是“非p且q，或非q且p”；

(3)“两次都没击中飞机”是“非p且非q”；

(4)“至少有一次击中飞机”是“p或q”.

提升练

一、选择题

1~6.DBABCD.

提示：

1.①由于2>1是真命题，所以“2>1或1>3”是真命题；

②由于方程$x^2-2x-4=0$的$\Delta=4+16>0$，所以“方程$x^2-2x-4=0$的判别式大于或等于0”是真命题；

③由于25是5的倍数，所以命题“25是6或5的倍数”是真命题；

④由于$(A\cap B)\subseteq A$，$(A\cap B)\subseteq(A\cup B)$，所以命题“集合$A\cap B$是$A$的子集，且是$A\cup B$的子集”是真命题.故选D.

2.特称命题的否定是全称命题.故选B.

3.在$\triangle ABC$中若$C>B$，则$c>b$，由正弦定理可得$\sin C>\sin B$，反之也成立，所以p是真命题；q命题中，当$c=0$时，$ac^2>bc^2$不成立，充分性不满足；反之成立，必要性满足，命题q是假命题.

故选A.

4.当$x=0$时，$2^x=3^x$，则命题p：任意$x\in\mathbf{R}$，2^x为假命题.令$f(x)=x^3+x^2-1$，因为$f(-1)\cdot f(1)=-1\times1=-1<0$，即函数$f(x)$在区间$(-1,1)$内存在零点，即$x^3+x^2-1=0$有解，即命题$q$：存在$x_0\in\mathbf{R}$，$x_0^3+x_0^2-1=0$为真命题，则$(\neg p)$且$q$为真命题.

故选B.

5.对于A，由于$\lg1=0$，因此A正确；

对于B，由于$\tan\dfrac{\pi}{4}=1$，因此B正确；

对于C，由于$0^2=0$，因此C不正确；

对于D，由于$3^x>0$恒成立，因此D正确.故选C.

6.对于A，“存在$x_0\in\mathbf{R}$，$x_0^2-x_0\leqslant0$”的否定是“任意$x\in\mathbf{R}$，$x^2-x>0$”；

对于B，若向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$满足$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为钝角或平角；

对于C，若$am^2\leqslant bm^2$，当$m\neq0$时$a\leqslant b$；

对于D，命题“p且q”为真，则p，q为真，“p或q”为真；“p或q”为真，则p或q为真，“p且q”不一定为真，所以命题“p或q为真”是命题“p且q为真”的必要条件.

故选D.

二、填空题

7.存在$m_0\in\mathbf{R}$，$m_0^2+m_0+1\leqslant0$；

8.1.

提示：

7.全称命题的否定为特称命题.

8.$\because$任意$x\in[0,\dfrac{\pi}{4}]$，$\tan x\leqslant m$是真命题，可得$\tan x\leqslant1$，$\therefore m\geqslant1$，则实数m的最小值为1.

三、解答题

9.解：$\because\neg p$为真，p或q为真，$\therefore p$为假，q为真.

若p为真命题，则$\Delta_1=m^2-4>0$，$\therefore m<-2$，或$m>2$，

$\therefore p$为假时，$-2\leqslant m\leqslant2$.①

若q为真命题，则$\Delta_2=16(m-2)^2-16<0$，即$1<m<3$.②

由①②可知m的取值范围为$1<m\leqslant2$.

10.解：$\because\Delta=4m^2+4>0$恒成立，

$\therefore$设其两根为x_1，x_2，且$x_1<x_2$.

$\because\{x|1\leqslant x\leqslant3\}\subseteq\{x|x^2-2mx-1>0\}=\{x|x>x_2$，或$x<x_1\}$，

$\therefore$方程$x^2-2mx-1=0$的两根x_1，x_2都大于3或都小于1.

$\because x_1x_2=-1<0$，$\therefore$两根都小于1.

令$f(x)=x^2-2mx-1$，则$\begin{cases}m<1,\\ f(1)>0,\end{cases}$解得$m<0$.

$\therefore m$的取值范围为$\{m|m<0\}$.

第15期

3版 第一章能力测试题

一、选择题

1~6.CDAADC； 7~12.BCAABB.

提示：

1.命题是可以判断真假的语句.

故选C.

2.逆命题：若x，y都等于0，则$x^2+y^2=0$，是真命题；

否命题：若$x^2+y^2\neq0$，则x，y不都等于0，是真命题；

逆否命题：若x，y不都等于0，则$x^2+y^2\neq0$，是真命题.

故选D.

3.若$m/\!/n$，由线面平行的定义知$m/\!/\alpha$成立，即充分性成立.若$m/\!/\alpha$，则m与n可能平行也可能是异面直线，故必要性不成立，即“$m/\!/n$”是“$m/\!/\alpha$”的充分不必要条件.

故选A.

4.命题中含有全称量词，故为全称命题，且是真命题.

故选A.

5.命题“存在$x\in\mathbf{Z}$，使$x^2+2x-1<0$”的否定为“任意$x\in\mathbf{Z}$，$x^2+2x-1\geqslant0$”.故选D.

6.$\because f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的偶函数，

$\therefore$若$f(x)$为$[0,1]$上的增函数，则$f(x)$为$[-1,0]$上的减函数.

又$\because f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的以2为周期的函数，且$[3,4]$与$[-1,0]$相差两个周期，

$\therefore$两区间上的单调性一致，所以可以得出$f(x)$为$[3,4]$上的减函数，故充分性成立.

若$f(x)$为$[3,4]$上的减函数，同样由函数周期性可得出$f(x)$为$[-1,0]$上的减函数，再由函数是偶函数可得出$f(x)$为$[0,1]$上的增函数，故必要性成立.

综上，“$f(x)$为$[0,1]$上的增函数”是“$f(x)$为$[3,4]$上的减函数”的充要条件.

故选C.

7.在$\triangle ABC$中，若$B=60°$，则$A+C=120°$，

$\therefore2B=A+C$，则A，B，C成等差数列；

若三个内角A，B，C成等差，则$2B=A+C$，

又$A+B+C=180°$，$\therefore3B=180°$，$B=60°$.故选B.

8.对于A，任意$x\in\mathbf{R}$，$e^x>0$，根据指数函数的性质得结果正确；对于B，存在$x_0\in\mathbf{R}$，$2^{x_0}<x_0^2$，例如当$x_0=3$时，满足题意，故正确；对于C，$a+b=0$的充要条件是$\dfrac{a}{b}=-1$，错误，比如$a=0=b$时，也满足$a+b=0$，但是不满足$\dfrac{a}{b}=-1$；对于D，$ab>1$可以是$a>1$，$b>1$，也可以是$a<-1$，$b<-1$，或者其中一个值大于1，一个值小于1大于0，等等情况较多，因此$a>1$，$b>1$是$ab>1$的充分不必要条件.

故选C.

9.$a_1=2$，$d=4$，$\therefore a_2=6$，$a_5=18$，$\therefore a_1$，a_2，a_5成等比数列.

又知当a_1，a_2，a_5成等比数列时，得$d=0$，或$d=4$.

所以“$d=4$”是“a_1，a_2，a_5成等比数列”的充分不必要条件.故选A.

10.$f(x)>g(x)$有解$\Leftrightarrow$存在$x_0\in\mathbf{R}$，使$f(x_0)>g(x_0)$成立.故选A.

11.对于①，当$x>0$时，$x+\dfrac{1}{x}\geqslant2$；$x=0$时，$x+\dfrac{1}{x}$无意义；$x<0$时，$x+\dfrac{1}{x}\leqslant-2$，$\therefore$①错误.

对于②，$a>b$时，不能得出$ac^2>bc^2$，即充分性不成立；$ac^2>bc^2$时，能得出$a>b$，即必要性成立，是必要不充分条件，②错误.

对于③，命题“存在$n\in\mathbf{N}$，$n^2>2^n$”的否定为“任意$n\in\mathbf{N}$，$n^2\leqslant2^n$”，③正确.

综上，正确的命题序号是③.

故选B.

12.由题知$P(a,2a)$，$\overrightarrow{PA}$与$\overrightarrow{PB}$的夹角为钝角的充要条件是$\begin{cases}\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}<0,\\ \overrightarrow{PA}\neq-\overrightarrow{PB},\end{cases}$解得$0<a<1$，或$1<a<2$.故选B.

二、填空题

13.真； 14.充分不必要； 15.④； 16.②.

提示：

13.原命题的否命题为“若$a\neq0$且$b\neq0$，则$ab\neq0$”，显然命题为真命题.

故答案为：真.

14.$\because p$：$x<-3$，或$x>1$，$\therefore\neg p$：$-3\leqslant x\leqslant1$.

$\because q$：$2<x<3$，$\therefore\neg q$：$x\leqslant2$，或$x\geqslant3$，则$\neg p\Rightarrow\neg q$.

15.命题“所有能被7整除的数都是奇数”的否定是“存在一个能被7整除的数不是奇数”，故填④.

16.逐一考查所给的问题：

①命题“任意$x\in\mathbf{R}$，$x^2+3<5x$”的否定是“存在$x_0\in\mathbf{R}$，$x_0^2+3\geqslant5x_0$”；

②已知p，q为两个命题，若“p或q”为假命题，则“$(\neg p)$且$(\neg q)=\neg(p$或$q)$”为真命题；

③“$a>2016$”是“$a>2018$”的必要不充分条件；

④“若$xy=0$，则$x=0$且$y=0$”是假命题，则它的逆否命题为假命题.

综上，所有真命题的序号是②.

三、解答题

17.解：(1)$\because(x-2)(x-3)=0\nRightarrow x-2=0$(可能$x-3=0$)，而$x-2=0\Rightarrow(x-2)(x-3)=0$，

$\therefore p$是q的必要不充分条件.

(2)$\because$四边形的对角线相等$\nRightarrow$四边形是平行四边形，四边形是平行四边形$\nRightarrow$四边形的对角线相等，$\therefore p$是q的既不充分也不必要条件.

(3)$\because(x-1)^2+(y-2)^2=0\Rightarrow x=1$且$y=2\Rightarrow(x-1)(y-2)=0$，

而$(x-1)(y-2)=0\nRightarrow(x-1)^2+(y-2)^2=0$，

$\therefore p$是q的充分不必要条件.

(4)在$\triangle ABC$中，大边对大角，大角对大边，所以$A>B\Leftrightarrow BC>AC$，故p是q的充要条件.

18.解：(1)该命题是全称命题.

当$a=0$，$b\neq0$时方程无解，故该命题为假命题.

(2)该命题是特称命题.

$\because x^2-2x+3=(x-1)^2+2\geqslant2$，$\therefore\dfrac{1}{x^2-2x+3}\leqslant\dfrac{1}{2}<\dfrac{3}{4}$.

故该命题是假命题.

19.解：第四步错：若$a-b=0$，则等式两边不能同除以$a-b$.

同理第六步错.

第三步到第四步“$(a+b)(a-b)=b(a-b)$”是“$a+b=b$”的必要不充分条件.

其全称命题的否定：存在$a-b=0$，$(a+b)(a-b)=b(a-b)\nRightarrow a+b=b$为真命题.

故其推理错误.

第五步到第六步犯上述同样的错误.

20.解：因为p且q为真命题，所以p，q均为真命题，

所以$\begin{cases}m>4,\\ [4(m-2)]^2-4\times4\times9\geqslant0,\end{cases}$

从而$\begin{cases}m>4,\\ m\geqslant5\text{或}m\leqslant-1,\end{cases}$

所以$m\geqslant5$.

21.解：(1)$\neg p$：存在$m\in\mathbf{R}$，使方程$x^2+x-m=0$无实数根.若方程$x^2+x-m=0$无实数根，则$\Delta=1+4m<0$，则$m<-\dfrac{1}{4}$，所以$\neg p$为真.

(2)$\neg q$：任意$x\in\mathbf{R}$，$x^2+x+1>0$.

因为$x^2+x+1=(x+\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}>0$，所以$\neg q$为真.

22.解：由$(4x-3)^2\leqslant1$，得$\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant1$，

令$A=\{x|\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant1\}$.

由$x^2-(2a+1)x+a(a+1)\leqslant0$，得$a\leqslant x\leqslant a+1$，

令$B=\{x|a\leqslant x\leqslant a+1\}$.

由$\neg p$是$\neg q$的必要不充分条件，得p是q的充分不必要条件，即$A\subsetneqq B$，

$\therefore\begin{cases}a\leqslant\dfrac{1}{2},\\ a+1\geqslant1,\end{cases}\therefore0\leqslant a\leqslant\dfrac{1}{2}$.

$\therefore$实数a的取值范围是$[0,\dfrac{1}{2}]$.

第16期

2版 《堂堂清》

§1.1 椭圆及其标准方程

1.C. 2.B. 3.D. 4.$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

5.由焦点在x轴上，得$a^2+5>2a^2+1$，即$a^2<4$，所以a的取值范围为$(-2,2)$.故填：$(-2,2)$.

6.A. 7.D. 8.B.

9.B.

提示：$|PF_1|\cdot|PF_2|\leqslant\dfrac{(|PF_1|+|PF_2|)^2}{4}=\dfrac{(2a)^2}{4}=4$.

10.$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{16}{9}y^2=1$.

11.解：(1)因为椭圆的焦点在x轴上，

所以可设它的标准方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

$\because$椭圆经过点$(2,0)$和$(0,1)$，

$\therefore\begin{cases}\dfrac{2^2}{a^2}+\dfrac{0}{b^2}=1,\\ \dfrac{0}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1,\end{cases}\therefore\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=1,\end{cases}$

故所求椭圆的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)因为椭圆的焦点在y轴上，所以可设它的标准方程为$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

$\because P(0,-10)$在椭圆上，$\therefore a=10$.

又$\because P$到它较近的一个焦点的距离等于2，

$\therefore-c-(-10)=2$，故$c=8$，

$\therefore b^2=a^2-c^2=36$.

$\therefore$所求椭圆的标准方程是$\dfrac{y^2}{100}+\dfrac{x^2}{36}=1$.

§1.2 椭圆的简单几何性质

1.B.

提示：椭圆的扁平程度看离心率e的大小，e越大，椭圆越扁.

2.A. 3.C.

4.B.

提示：由题意，可得$c=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot2b$，即$c=\sqrt{3}b$，再结合$a^2=b^2+c^2$，$e=\dfrac{c}{a}$，即可得解.

5.D. 6.A. 7.9.

8.解：设椭圆方程为$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$，弦$AB$的中点$M(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2})$，设直线$y=3x-2$与椭圆交于$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$\begin{cases}b^2y_1^2+a^2x_1^2=a^2b^2,\\ b^2y_2^2+a^2x_2^2=a^2b^2,\end{cases}$得$a^2(x_1^2-x_2^2)+b^2(y_1^2-y_2^2)=0$.

两边同时除以x_1-x_2，得$a^2\cdot(x_1+x_2)+b^2(y_1+y_2)\cdot\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=0$，

$\therefore a^2\cdot2x_0+b^2\cdot2y_0\cdot k=0$，$\therefore a^2\cdot2\times\dfrac{1}{2}+b^2\cdot2\times(-\dfrac{1}{2})\times3=0$，

$\therefore a^2=3b^2$.

又$a^2-b^2=50$，$\therefore b^2=25$，$a^2=75$，

$\therefore$所求椭圆方程为$\dfrac{y^2}{75}+\dfrac{x^2}{25}=1$.

3版 同步分层能力测试题(三)

基础练

一、选择题

1~6.CCBCCB.

提示：

1.根据椭圆定义知$\triangle ABC$的周长$l=4a=4\sqrt{3}$.故选C.

2.$\because$椭圆的长轴长是短轴长的$\sqrt{2}$倍，$\therefore2a=\sqrt{2}\times2b$，得$a=\sqrt{2}b$.

又$\because a^2=b^2+c^2$，$\therefore2b^2=b^2+c^2$，可得$c=b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}a$，

因此椭圆的离心率为$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

故选C.

3.由椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$，得$a=5$，则$2a=10$，且点$P$到椭圆一个焦点的距离为7，由定义得点$P$到另一焦点的距离为$2a-7=10-7=3$.

故选B.

4.由题意，知$\begin{cases}2a+2b=18,\\ 2c=6,\\ a^2-b^2=c^2,\end{cases}$解得$a=5$，$b=4$.

又焦点可能在x轴上，也可能在y轴上，

$\therefore$椭圆方程为$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$，或$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$.故选C.

5.椭圆$x^2+my^2=1$的标准方程为$x^2+\dfrac{y^2}{\frac{1}{m}}=1$.

又$\dfrac{1}{2}<e<1$，$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}$，

$\because e\in(\dfrac{1}{2},1)$，$\therefore0<\dfrac{b^2}{a^2}<\dfrac{3}{4}$.

当椭圆的焦点在x轴上时，$a^2=1$，$b^2=\dfrac{1}{m}$，则$m>\dfrac{4}{3}$；当